Logique combinatoire

Renaud Costadoat
Lycée Dorian

Introduction

Savoir

Vous êtes capables :

- de modéliser la chaîne d'information d'un système.

Problematique

Vous devez êtes capables :

- de représenter l'information dans une partie commande,
- de concevoir des systèmes de traitement de l'information à l'aide de portes logiques.

Les codes binaires

- Symboles: 0 et 1 appelés bits (binary digit), base: 2,
- La succession de ces nombres est 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111,
- Sous forme polynomiale, un nombre binaire quelconque est exprimé par:

$$N = \sum_{0}^{n} \alpha_i . 2^i \text{avec } \alpha_i = 0 \text{ ou } 1$$

- ex: $10110 \rightarrow 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 22$ décimal.
- Définitions:
  - Un nombre binaire de n bits permet d'obtenir 2^n nombres différents dont le plus grand a pour valeur décimale $2^n - 1$,
  - On appelle 'octet' (byte en anglais) un nombre de 8 bits (domaine 0..255),
  - On appelle 'mot' (word en anglais) un nombre de 16 bits (domaine 0..65535), les bits 0..7 constituant l'octet de 'poids faible', les bits 8..15 constituant l'octet de 'poids fort'.

Les codes binaires réfléchi

- L'utilisation du code binaire vu précédemment (appelé aussi code binaire naturel) dans le traitement numérique d'un signal peut poser de problèmes,
- En effet, supposons un capteur enregistrant les valeurs successives dans un comptage 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101,... On voit que le passage de 1 à 2 nécessite la modification des bits 0 et 1, ce qui peut introduire des aléas (effets transitoires néfastes). On risque d'obtenir: 0001 0000 0010 ou 0001 0011 0010
- Pour éviter ces erreurs, il suffit de coder chaque nombre de sorte que 2 nombres successifs ne différent que d'un élément binaire : code à distance unité. (on appelle distance entre 2 mots-code le nombre d'éléments binaires qui différent),
- Le code Gray est le plus utilisé.

Les codes binaires réfléchi

- Avec ce code, le passage d'un nombre au suivant ne nécessite que la modification d'un seul bit,
- La relation qui lie un nombre binaire pur avec le nombre binaire codé Gray s'écrit: ($\oplus$ = OU exclusif),

$$N_g = \frac{N \oplus 2N}{2}$$

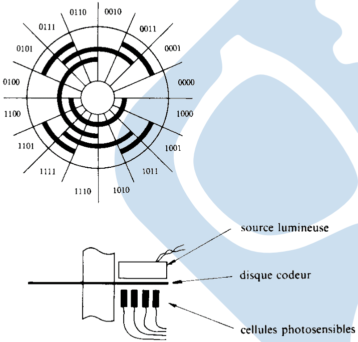
- ex: N = 54 décimal
  - 110110 binaire pur $\longrightarrow$ 2N = 1101100 (obtenu en décalant tous les bits d'une position à gauche),
  - Le OU exclusif donne 0 si les 2 bits sont identiques,

0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0

  - La division par 2 revient à décaler tous les bits d'une position vers la droite (le bit 0 initial est perdu), cela donne 101101.

Les codes binaires réfléchi

- Ce code est utilisé par exemple dans un asservissement où la position angulaire d'un axe peut être codée par un dispositif optique composé d'un disque sur lequel on a gravé un motif,
- Des capteurs peuvent alors 'lire' la combinaison désirée.

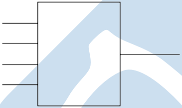


Définition pour les opérations

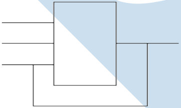
- Les **opérations logiques** sont réalisées en associant des **tensions** à des variables logiques,
- Les **états et les valeurs logiques** sont représentés par les nombres 0 et 1,
- La **valeur de la variable** est une **tension électrique** appliquée entre la borne considérée et la masse du montage,
- Une **fonction logique** est représentée par des groupes de variables reliées par des **opérateurs logiques**, elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1,
- La **table de vérité** est une table qui permet de connaître la valeur de S en fonction des diverses **combinaisons** possibles des variables d'entrée Ei,
- Le **chronogramme** est le graphe de l'évolution en fonction du temps des variables et des fonctions logiques.

Combinatoire ou séquentiel ?

- Une fonction est dite **combinatoire** si ses sorties **ne dépendent que** des combinaisons d'entrée et pas de l'histoire de celles-ci,
- A une combinaison de variables d'entrée correspond une seule combinaison des sorties,
- Aucune mémoire des états précédents n'est conservée.

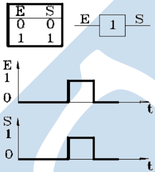


- Une fonction est dite séquentielle si ses sorties **dépendent** des combinaisons d'entrée et de l'histoire de celles-ci,
- A une combinaison de variables d'entrée correspond plusieurs combinaisons des sorties,
- Tout ou partie des combinaisons d'entrée et de sortie qui peuvent influencer les sorties de nouvelles combinaisons est conservé.

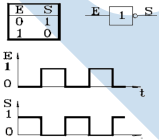


Fonction à une variable logique

- **OUI**: S = E,
- S est **identique** à E.

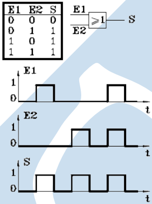


- **NON**: S = $\overline{\text{E}}$,
- S est le **complément** de E.

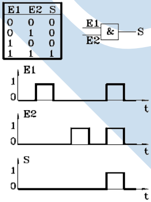


Fonction à deux variables logiques

- **OU**: $S = E_1 + E_2$,
- S est vrai si E_1 **ou** E_2 est vrai.



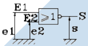
- **ET**: $S = E_1 . E_2$,
- S est vrai si E_1 **et** E_2 sont vraies.

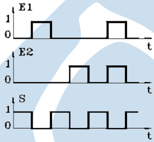


Fonction à deux variables logiques

- **NON OU**: $S = \overline{E_1 + E_2}$,
- S est le **complément** de $(E_1 + E_2)$.

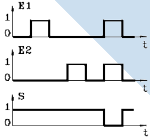
E1	E2	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0





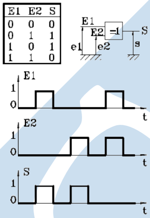
- **NON ET**: $S = \overline{E_1 . E_2}$,
- S est le **complément** de $(E_1 . E_2)$.

E1	E2	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

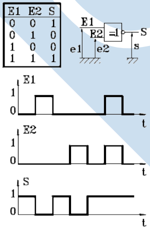


Fonction à deux variables logiques

- **OU exclusif**: $S = E_1 \oplus E_2$,
- $S = E_1.\overline{E_2} + \overline{E_1}.E_2$,
- S ne vaut 1 que si les 2 variables d'entrée ont des valeurs différentes: **anticoïncidence**.



- **NON OU exclusif**: $S = \overline{E_1 \oplus E_2}$,
- $S = \overline{E_1}.\overline{E_2} + E_1.E_2$,
- S ne vaut 1 que si les 2 variables d'entrée ont des valeurs identiques: **coïncidence**.



Théorèmes fondamentaux

- identités remarquables:
  - $1.E = E$, $E + 1 = 1$, $0.E = 0$, $E + 0 = E$,
- commutativité:
  - $E_1.E_2 = E_2.E_1$, $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$,
- associativité:
  - $E_1.(E_2.E_3) = (E_1.E_2).E_3$, $E_1 + (E_2 + E_3) = (E_1 + E_2) + E_3$,
- distributivité:
  - $E_1.(E_2 + E_3) = (E_1.E_2) + (E_1.E_3)$, $E_1 + (E_2.E_3) = (E_1 + E_2).(E_1 + E_3)$,
- idempotence:
  - $E + E = E$, $E.E = E$
- complémentarité
  - $E + \overline{E} = 1$, $E.\overline{E} = 0$
- absorption
  - $E + E.A = E$.

Théorèmes fondamentaux

Principe de dualité:

Toute expression logique demeure vraie si l'on remplace '+' par '.' et 0 par 1 et réciproquement (facilement vérifiable pour les expressions précédentes).

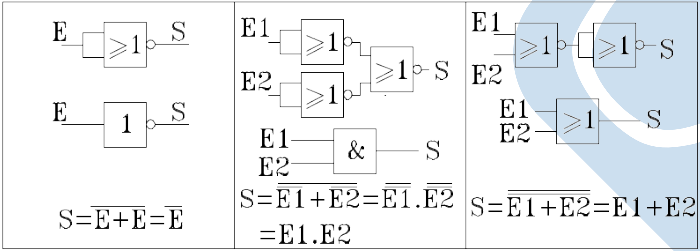
Théorèmes de De Morgan

- Théorème 1:
  Le produit logique complémenté de 2 variables booléennes est égal à la somme logique des compléments de ces variables:
  $$\overline{E_1.E_2} = \overline{E_1} + \overline{E_2},$$
- Théorème 2:
  La somme logique complémentée de 2 variables booléennes est égale au produit logique des compléments de ces variables:
  $$\overline{E_1 + E_2} = \overline{E_1}.\overline{E_2},$$
- Remarque: Ces relations sont généralisables à n variables booléennes.

Représentation des opérateurs logiques

Emploi d'opérateurs NOR

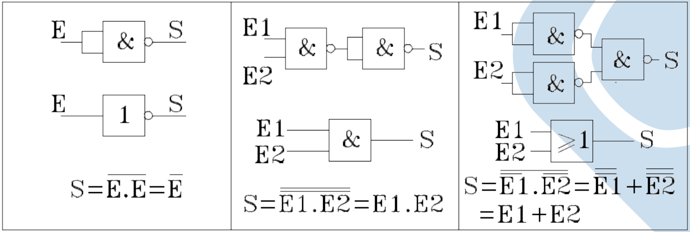
NON | ET | OU



Représentation des opérateurs logiques

Emploi d’opérateurs NAND

NON | ET | OU



Représentation des opérateurs logiques

Exemple

- Soit la forme canonique $S = \overline{E_1}.E_2 + E_1.\overline{E_2}$,

E_1	E_2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Question: Établir les montages avec des opérateurs NAND et NOR.

Représentation des opérateurs logiques

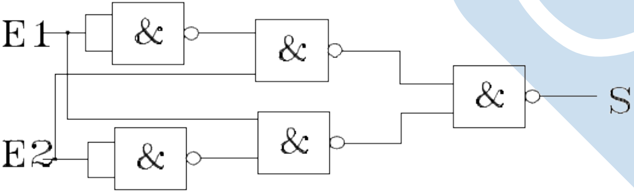
$1^{ère}$ solution avec opérateurs NAND

- D'après le théorème de De Morgan:

$$\overline{S} = \overline{E_1.\overline{E_2} + \overline{E_1}.E_2} = \overline{E1.\overline{E2}}.\overline{\overline{E1}.E2}$$

$$\text{Donc: } S = \overline{\overline{E1.\overline{E2}}.\overline{\overline{E1}.E2}}$$

- Ce qui donne la solution suivante avec 5 opérateurs NAND:



Représentation des opérateurs logiques

2$^{\text{ème}}$ solution avec opérateurs NOR

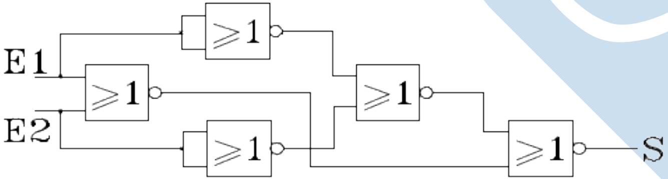
- D'après le théorème de De Morgan:

$$S = E_1.\overline{E_2} + \overline{E_1}.E_2 + E_1.\overline{E_1} + E_2.\overline{E_2} = (E_1 + E_2).(\overline{E_1} + \overline{E_2})$$

D'après le théorème de De Morgan : $\overline{S} = \overline{(E_1 + E_2).(\overline{E_1} + \overline{E_2})} = \overline{(E_1 + E_2)} + \overline{(\overline{E_1} + \overline{E_2})}$

Donc: $S = \overline{\overline{(E_1 + E_2)} + \overline{(\overline{E_1} + \overline{E_2})}}$

- Ce qui donne la solution suivante avec 5 opérateurs NOR:



Méthode de Karnaugh

- La représentation d'une forme canonique sous la forme d'une table de vérité devient **lourde** dés que le nombre de variables d'entrée est important. Par exemple, 3 variables nécessitent 8 lignes dans la table,
- La méthode de **Karnaugh** permet de simplifier une expression booléenne et de déduire le montage adéquat,
- Elle consiste à mettre en évidence le regroupement de termes tel que $A + A.B = A$,
- Le codage des états des lignes et des colonnes est binaire réfléchi pour qu'une et une seule variable change d'état d'une case à une case adjacente.

Méthode de Karnaugh

- Soit la forme canonique $S = \overline{E_1.E_3 + E_2.E_4}$.

$$S = \overline{E_1.E_3}.\overline{E_2.E_4} = (\overline{E_1} + \overline{E_3}).(\overline{E_2} + \overline{E_4}) = \overline{E_1}.\overline{E_2} + \overline{E_1}.\overline{E_4} + \overline{E_3}.\overline{E_2} + \overline{E_3}.\overline{E_4}$$

- D'un point de vue théorique, on a avec 4 variables:

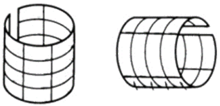
$E_1.E_2/E_3.E_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	$\overline{E_1}.\overline{E_2}.\overline{E_3}.\overline{E_4}$	$\overline{E_1}.\overline{E_2}.\overline{E_3}.E_4$	$\overline{E_1}.\overline{E_2}.E_3.E_4$	$\overline{E_1}.\overline{E_2}.E_3.\overline{E_4}$
0 1	$\overline{E_1}.E_2.\overline{E_3}.\overline{E_4}$	$\overline{E_1}.E_2.\overline{E_3}.E_4$	$\overline{E_1}.E_2.E_3.E_4$	$\overline{E_1}.E_2.E_3.\overline{E_4}$
1 1	$E_1.E_2.\overline{E_3}.\overline{E_4}$	$E_1.E_2.\overline{E_3}.E_4$	$E_1.E_2.E_3.E_4$	$E_1.E_2.E_3.\overline{E_4}$
1 0	$E_1.\overline{E_2}.\overline{E_3}.\overline{E_4}$	$E_1.\overline{E_2}.\overline{E_3}.E_4$	$E_1.\overline{E_2}.E_3.E_4$	$E_1.\overline{E_2}.E_3.\overline{E_4}$

- D'un point de vue théorique, on a avec 4 variables:

$E_1.E_2/E_3.E_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	1	1
0 1	1	0	0	1
1 1	1	0	0	0
1 0	1	1	0	0

Détermination de fonction logique

- La méthode de recherche de l'**expression minimale** d'une fonction logique S à partir d'un tableau de Karnaugh consiste à rechercher des cases **adjacentes** comportant des 1 de sorte qu'un regroupement puisse être opéré dans le but de simplifier S,
- Les cases extrêmes peuvent être considérées comme adjacentes puisqu'une seule variable change d'état, donc le tableau peut être considéré comme un cylindre vertical ou horizontal,



- *Remarque:* Lorsque certains états de la fonction S ne sont **pas définis**, l'état de la sortie dans le tableau de Karnaugh est symbolisé par une croix (état indifférent). Les croix peuvent être remplacées par des 0 ou des 1 pour faciliter au mieux les regroupements.

Détermination de fonction logique

Recherche d'octets

Huit 1 voisins peuvent être regroupés car 3 variables changent d'état, celles-ci disparaissent dans le terme qui résulte.

	1	1	
	1	1	
	1	1	
	1	1	

1			1
1			1
1			1
1			1

Exemple: $S = \overline{E_3}$

$E_1.E_2/E_3.E_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 1	1	1	0	0
1 0	1	1	0	0

Détermination de fonction logique

Recherche de quartets

Quatre 1 voisins peuvent être regroupés car deux variables changent d'état, celles-ci disparaissent dans le terme qui résulte.

		1	
		1	
		1	
		1	

		1	1
		1	1

1			1
1			1

1			1
1			1

Exemple: $S = E_1.E_2 + \overline{E_2}.\overline{E_4}$

$E_1.E_2/E_3.E_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	0	1
0 1	0	0	0	0
1 1	1	1	1	1
1 0	1	0	0	1

Détermination de fonction logique

Recherche de doublets

Deux 1 voisins peuvent être regroupés car une seule variable change d'état, celle-ci disparaît dans le terme qui résulte.

		1	
		1	

1			1

Exemple: $S = \overline{E_1}.\overline{E_2}.\overline{E_3} + \overline{E_2}.\overline{E_3}.E_4 + E_2.E_3.E_4 + E_1.E_3.\overline{E_4}$

$E_1.E_2/E_3.E_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	1	0	0
0 1	0	0	1	0
1 1	0	0	1	1
1 0	0	1	0	1

Conclusion

Savoir

Vous devez être capables :

- de manipuler des équations logiques,
- de manipuler des fonctions combinatoires,
- de concevoir un câblage de portes logiques.

Problematique

Il est nécessaire d'utiliser d'autres formes de représentation d'un mécanisme.

- *Problème: Comment concevoir une commande séquentielle*
- **Perspectives**: Réaliser des algorithmes séquentiels capables de piloter le comportement d'un système.